یادداشت: همگرایی در طیف پیوسته

سهراب ملکی

۲۲ مرداد ۱۴۰۴

چکیده

در این یادداشت نشان خواهم داد که گرچه عمل‌گرهای پیوسته ویژه‌بردارهایی در فضای هیلبرت ندارند، اما می‌توان دنباله‌هایی همگرا به آن‌ها در فضای هیلبرت تعریف کرد

۱ تعاریف اولیه

در نمایش عمل‌گر مورد نظر کار می‌کنم. برای سادگی و بدون کم کردن از عمومیت مسئله، عمل‌گر مکان را در نظر می‌گیرم. عمل‌گر $\hat{\mathbb{E}}(\xi)$ تعریف می‌کنم:

$$\hat{\mathbb{E}}(\xi) := \begin{cases} ۱ & x < \xi \\ ۰ & x > \xi \end{cases}$$

پس

$$\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\,(\xi) = \hat{\mathbb{E}}(\xi + \mathrm{d}\xi) - \hat{\mathbb{E}}(\xi)$$

این حد، خوش تعریف و کران‌دار است. همچنین این عمل‌گر در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\hat{\mathbb{E}}(x_{\min}) = ۰ \qquad , \qquad \hat{\mathbb{E}}(x_{\max}) = \mathbb{1}$$

$$\int_{۰}^{\mathbb{1}} \mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\,(\xi) = \hat{\mathbb{1}}$$

$$\hat{\mathbb{E}}(\xi)\hat{\mathbb{E}}(\xi') = \hat{\mathbb{E}}(\xi')\hat{\mathbb{E}}(\xi) = \begin{cases} \hat{\mathbb{E}}(\xi) & \xi \le \xi' \\ \hat{\mathbb{E}}(\xi') & \xi \ge \xi' \end{cases} \tag{۱}$$

عمل‌گر مکان (که در نمایش مکان همان x است) را می‌توانم به صورت زیر بنویسم:

$$x = \int_{۰}^{\mathbb{1}} \xi \,\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\,(\xi)$$

و به همین ترتیب:

$$f(x) = \int_{۰}^{\mathbb{1}} f(\xi)\,\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\,(\xi)$$

از معادله‌ی (۱) می‌توان فهمید

$$\left(\int f(\xi)\,\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\,(\xi)\right)\left(\int g(\eta)\,\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\,(\eta)\right) = \int f(\sigma)g(\sigma)\,\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\,(\sigma) \tag{۲}$$

۲ همگرایی قوی به ویژه‌بردارها

مقدار دلخواه ε را در نظر بگیرید. عمل‌گر زیر را تعریف می‌کنم:

$$\hat{P}_\lambda := \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این یک تصویرگر است. همچنین فرض کنید ψ_λ ویژه‌بردار این عمل‌گر با ویژه‌مقدار ۱ باشد. ساخت چنین برداری بسیار ساده است. کافی است برداری مانند ϕ پیدا شود که $\hat{P}_\lambda\phi \neq ۰$. آنگاه:

$$\psi_\lambda = \frac{\hat{P}_\lambda\phi}{\left\|\hat{P}_\lambda\phi\right\|}$$

بنابراین:

$$\hat{P}_\lambda\psi_\lambda = \psi_\lambda$$

حال برای اثبات همگرایی می‌نویسم:

$$\hat{X}\psi_\lambda = \hat{X}\hat{P}_\lambda\psi_\lambda = \left(\int_۰^{\mathbb{1}} \xi\,\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)\right)\left(\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\eta\right)\right)\psi_\lambda$$

از معادله‌ی (۲) دارم:

$$\hat{X}\psi_\lambda = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \xi\,\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)\,\psi_\lambda$$

بنابراین:

$$\left\|\left(\hat{X}-\lambda\hat{\mathbb{1}}\right)\psi_\lambda\right\|^۲ = \left\langle\psi_\lambda\right|\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}\left(\xi-\lambda\right)^۲\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)\left|\psi_\lambda\right\rangle$$

که در آن مجدداً از (۲) استفاده کرده‌ام. از طرفی:

$$\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}\left(\xi-\lambda\right)^۲\left\langle\psi_\lambda\right|\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)\left|\psi_\lambda\right\rangle \leq \varepsilon^۲\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}\left\langle\psi_\lambda\right|\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)\left|\psi_\lambda\right\rangle$$

که انتگرال سمت راست برابر واحد است:

$$\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}\left\langle\psi_\lambda\right|\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)\left|\psi_\lambda\right\rangle = \left\langle\psi_\lambda\right|\left(\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}\mathrm{d}\hat{\mathbb{E}}\left(\xi\right)\right)\left|\psi_\lambda\right\rangle = \left\langle\psi_\lambda\right|\hat{P}_\lambda\left|\psi_\lambda\right\rangle = ۱$$

نهایتاً به دست آمد:

$$\boxed{\left\|\left(\hat{X}-\lambda\hat{\mathbb{1}}\right)\psi_\lambda\right\| \leq \varepsilon}$$

به صورت مشابه:

$$\left\|\left(f(\hat{X})-f(\lambda)\hat{\mathbb{1}}\right)\psi_\lambda\right\| \leq \varepsilon\left|f'(\lambda)\right| + \mathcal{O}(\varepsilon^۲)$$